XXV

Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2016

Оглавление

Приводимые задания предлагались в трех возрастных категориях (9, 10, 11 классы) по два равноценных по сложности варианта в 9 и 10 классах и по два равноценных по сложности варианта в каждом из трех регионов (ЗАПАД, СИБИРЬ, ВОСТОК) для участников 11 класса. Тематика отдельных задач в разных классах пересекается, при этом младшим классам предлагались более легкие варианты заданий.

9 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. На кодовом замке имеется круглый диск с нанесенными на равноотстоящих интервалах по его периметру числами от 1 до 12. Изначально диск установлен как на Рис.1. Замок откроется, если диск окажется повернутым на 30^0 относительно своего первоначального положения (Рис. 2). Для изменения положения диска имеется специальный стержень, который можно продеть через два любых диаметрально противоположных числа (например, через 1 и 7 как на Рис.3), а затем повернуть диск вокруг стержня на 180^0 (в результате диск окажется в положении, изображенном на Рис.4). Каким образом и за какое наименьшее число таких поворотов можно открыть замок?

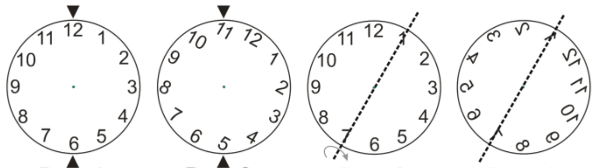
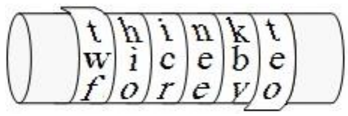
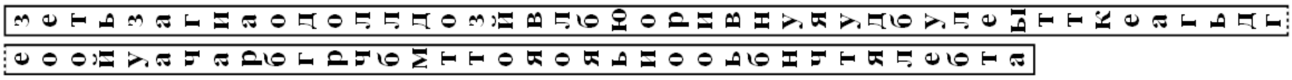


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

2. Для шифрования сообщений Катя и Антон использовали шифр Сцитала: на круглую палочку виток к витку без просветов и нахлёстов наматывалась лента. При горизонтальном положении палочки на ленту по всей длине стержня построчно записывался текст сообщения без знаков препинания и пробелов. После этого лента с записанным на ней текстом посылалась адресату. Антон передал Кате ленту, на которой было написано вот что:





К сожалению, Катя свою палочку потеряла, но она видит, что лента исписана полностью, и знает, что при намотке ленты было сделано целое число оборотов. Помогите ей восстановить сообщение.

3. Докажите, что для каждого натурального $n \geq 5$ квадрат можно разрезать на n прямоугольников (не обязательно одинаковых), у каждого из которых одна сторона вдвое больше другой. Резать разрешается по линиям, параллельным сторонам исходного квадрата.

4. Для зашифрования осмысленного русского слова используется последовательность натуральных чисел $y_1, y_2, \ldots,$ которая формируется так: y_1 выбирается произвольно, а остальные члены последовательности вычисляются по формуле $y_{n+1} = 4y_n + 23, n = 1, 2, \ldots$. Зашифрование производилось следующим образом. Первая буква слова заменялась числом согласно таблице и умножалась на y_1. Потом также заменялась вторая буква и умножалась на y_2 и т.д. Затем все произведения были замены остатками от деления на 32. В результате получилось вот что:

8, 16, 24, 13, 22, 10, 9, 16, 0, 28, 24

Какое слово было зашифровано?

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

5. На столе выложены 11 карточек в порядке возрастания их номеров (Рис.а). Карточки разрешается перекладывать *тройками*, а именно: выбираем три любые карточки, например, с номерами 2, 3 и 5. Затем крайняя левая карточка перемещается на место средней, средняя на место крайней правой, а крайняя правая на место крайней левой. Результат изображен на Рис.б. Можно ли, перекладывая карточки указанным способом, уложить их как на Рис.а, но в порядке убывания номеров (карточка с номером 11 – первая, с номером 1 – последняя)?

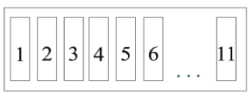


Рис. а

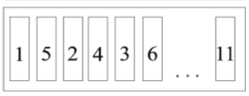
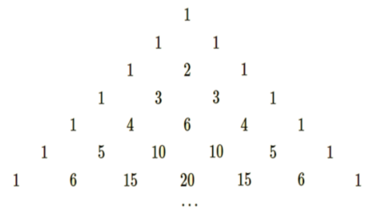


Рис. б

6. *Треугольником Паскаля* называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится в строке с номером 100?



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

При повороте диска на месте четных чисел вновь оказываются четные, а на месте нечетных – нечетные. Поэтому открыть замок нельзя.

Ответ: Такими поворотами открыть замок нельзя.

Задача 2

Лента исписана полностью, а при ее намотке было сделано целое число оборотов. Это означает, что текст был по сути вписан в ячейки прямоугольной таблицы. Причем таблица оказалась заполненной полностью. В тексте 81 буква. Значит, стоит попробовать вписать зашифрованный текст (по столбцам сверху вниз) в таблицы размером $3\times 27, 27\times 3$ и 9×9. Осмысленный текст (при чтении по строкам) получается в последнем случае.

з	о	в	у	т	е	б	я	н
е	д	л	я	т	о	г	о	ч
т	о	б	у	к	о	р	я	т
ь	л	ю	д	е	й	ч	ь	я
з	л	о	б	а	у	б	и	л
а	д	р	у	г	а	м	о	е
г	о	и	л	ь	ч	т	о	б
и	з	в	е	д	а	т	ь	т
а	й	н	ы	г	р	о	б	а

Ответ: Зову тебя не для того, Чтоб укорять людей, чья злоба Убила друга моего, Иль чтоб изведать тайны гроба.

Задача 3

Если квадрат уже разрезан на k прямоугольников с отношением сторон 2:1, то его можно разрезать и на k+3 таких прямоугольников. Действительно, для этого достаточно один из этих k прямоугольников, разрезать на четыре прямоугольника, у каждого из которых стороны также относятся как 2:1 (Рис.I). Таким образом, для завершения доказательства остается показать, что квадрат можно разрезать на n=5,6 и 7 прямоугольников указанного вида. Соответствующие линии разреза приведены на Рис.II–IV. Для удобства сторона квадрата принята равной 24.

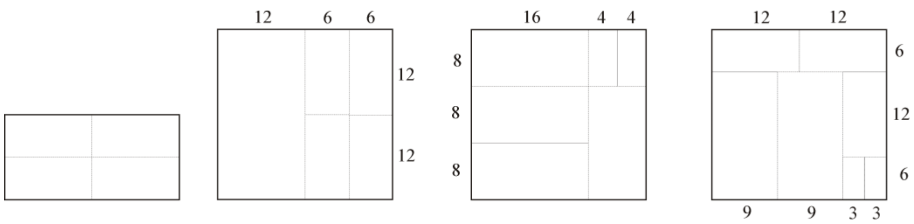


Рис.I Рис.II. $n=5$. Рис.III. $n=6$. Рис.IV. $n=7$.

Задача 4

Обозначим через $r_{32}(a)$ остаток от деления числа a на 32. Вычислим несколько первых членов последовательности $y_1, y_2, \ldots$:

$$y_2 = 4y_1 + 23,\ \ y_3 = 4(4y_1 + 23) + 23 = 16y_1 + 5\cdot 23,\ \ y_4 = 64y_1 + 21\cdot 23.$$

Далее $r_{32}(y_4) = r_{32}(21 \cdot 23) = 3,$ а значит $r_{32}(y_5) = r_{32}\left(4y_4 + 23\right) = r_{32}\left(4 \cdot 3 + 23\right) = 3.$ То есть, начиная с четвертого номера, все члены последовательности $r_{32}(y_n)$ равны 3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ – числовые значения букв искомого слова. Чтобы найти x_4 надо решить уравнение $r_{32}(y_4 x_4) = 13.$ Заметим, что $r_{32}(y_4 x_4) = 13 \Leftrightarrow r_{32}(3x_4) = 13 \Leftrightarrow r_{32}(11 \cdot 3x_4) = r_{32}(11 \cdot 13) \Leftrightarrow r_{32}(x_4) = 15 \Rightarrow x_4 = 15.$ Следовательно, четвертая буква слова – П. Аналогично находятся числовые значения букв $x_5, \ldots, x_{12}$. В итоге, искомое слово принимает вид ***ПТОГРАФИЯ. Ответ легко угадывается.

Ответ: КРИПТОГРАФИЯ.

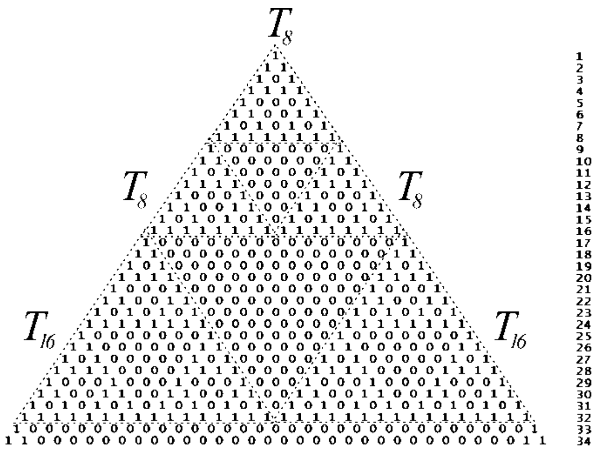
Задача 5

Пусть сейчас карточки выложены в каком-то порядке. Пару карточек будем называть *беспорядком*, если у левой карточка номер больше, чем у правой. Например, для пяти карточек 1,2,5,4,3 имеется три беспорядка: (5,4), (5,3), (4,3). В исходном расположении карточек на столе число беспорядков равно нулю. Перекладывая тройку карточек указанным в условии способом, мы число беспорядков изменяем на некоторое четное число. Значит количесво беспорядков всегда должно оставаться четным. Но, если карточки выложены в обратном порядке, то число беспорядков равно 10+9+…+1, то есть нечетно.

Ответ: Нельзя.

Задача 6

Будем заменять в треугольнике нечетные числа единицами, а четные нулями. При этом каждое число внутри по-прежнему остается равным сумме стоящих над ним чисел, если принять, что 0+0=1+1=0, 1+0=0+1=1. Рассмотрим структуру треугольника подробнее. Треугольник, сформированный первыми восемью строками, обозначим T_8.



В строке 9 всего две единицы (по бокам), остальные – нули. С этой строки и вниз далее идет формирование двух треугольников T_8, которые "встречаются друг с другом" в строке 16. Начиная со строки 17 и ниже, образовываются два треугольника T_{16}, которые, в свою очередь, "встречаются" в строке 32. Со строки 33 и ниже формируются два треугольника T_{32} и т.д. Таким образом, строки, чей номер представляет собой степень двойки, состоят только из единиц. Понятно, что, после строки 64, идет формирование "с нуля" двух одинаковых треугольников. Строки с номером 36 в этих новых треугольниках как раз и содержатся в строке 100 исходного (большого) треугольника, т.к. 100=64+36. Значит единиц в строке 100 вдвое больше, чем единиц в строке с номером 36. В свою очередь единиц в строке 36 вдвое больше, чем в строке 4 (рассмотреть треугольники, формирующиеся после строки 32), то есть 8 штук. Значит в строке 100 их 16. Остальные 84 – нули.

Ответ: 84.

XXV Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. На кодовом замке имеется круглый диск с нанесенными на равноотстоящих интервалах по его периметру числами от 1 до 12. Изначально диск установлен как на Рис.1. Замок откроется, если диск окажется повернутым на 30^0 относительно своего первоначального положения (Рис. 2). Для изменения положения диска имеется специальный стержень, который можно продеть через два любых диаметрально противоположных числа (например, через 1 и 7 как на Рис.3), а затем повернуть диск вокруг стержня на 180^0 (в результате диск окажется в положении, изображенном на Рис.4). Каким образом и за какое наименьшее число таких поворотов можно открыть замок?

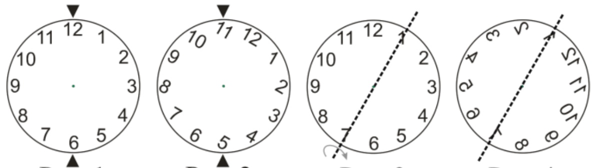
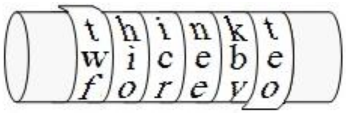
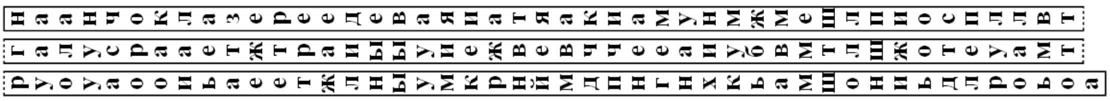


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

2. Для шифрования сообщений Катя и Антон использовали шифр Сцитала: на круглую палочку виток к витку без просветов и нахлёстов наматывалась лента. При горизонтальном положении палочки на ленту по всей длине стержня построчно записывался текст сообщения без знаков препинания и пробелов. После этого лента с записанным на ней текстом посылалась адресату. Антон передал Кате ленту, на которой было написано вот что:





К сожалению, Катя свою палочку потеряла, но она видит, что лента исписана полностью, и знает, что при намотке ленты было сделано целое число оборотов. Помогите ей восстановить сообщение.

3. Для проверки корректности номера пластиковой карты, представляющего собой набор из 16 цифр $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16})$, вычисляются контрольные суммы A, B и C:

$A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$,

$B = x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 7x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{15}$, $C = x_1 + x_2 + x_4 + 7x_5 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + x_{14} + x_{16}$.

Если все три суммы A, B и C делятся нацело на 10, то номер признаётся корректным. Каких корректных номеров больше и насколько: у которых первые 4 цифры 0 0 0 0 или тех, у которых последние 4 цифры 0 0 0 0?

4. Для зашифрования осмысленного русского слова используется последовательность натуральных чисел $y_1, y_2, \ldots$, которая формируется так: y_1 выбирается произвольно, а остальные члены последовательности вычисляются по формуле $y_{n+1} = 4y_n + 25, n = 1, 2, \ldots$. Зашифрование производилось следующим образом. Первая буква слова заменялась числом согласно таблице и умножалась на y_1. Потом также заменялась вторая буква и умножалась на y_2 и т.д. Затем все произведения были замены остатками от деления на 32. В результате получилось вот что: **12, 22, 16, 1, 3, 15, 0, 26, 0, 9, 8, 1.** Какое слово было зашифровано?

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

5. На столе выложены 13 карточек в порядке возрастания их номеров (Рис.а). Карточки разрешается перекладывать *тройками*, а именно: выбираем три любые карточки, например, с номерами 2, 3 и 5. Затем крайняя левая карточка перемещается на место средней, средняя на место крайней правой, а крайняя правая на место крайней левой. Результат изображен на Рис.б. Можно ли, перекладывая карточки указанным способом, уложить их как на Рис.а, но в порядке убывания номеров (карточка с номером 13 – первая, с номером 1 – последняя)?

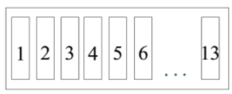


Рис. а

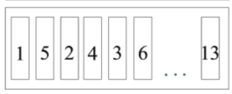


Рис. б

6. *Треугольником Паскаля* называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
…

внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится: а) в строке с номером 256? б) в строке с номером 200?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

При повороте диска на месте четных чисел вновь оказываются четные, а на месте нечетных – нечетные. Поэтому открыть замок нельзя.

Ответ: Такими поворотами открыть замок нельзя.

Задача 2

Лента исписана полностью, а при ее намотке было сделано целое число оборотов. Это означает, что текст был по сути вписан в ячейки прямоугольной таблицы. Причем таблица оказалась заполненной полностью. В тексте 136 букв, и $136=2^3\cdot 17$. Значит, стоит попробовать вписать зашифрованный текст (по столбцам сверху вниз) в таблицы размеров типа 4×34, 8×17 и 17×8. Осмысленный текст (при чтении по строкам) получается в последнем случае.

н	а	ш	а	в	е	т	х
а	я	л	а	ч	у	ж	к
а	и	п	е	ч	а	л	ь
н	а	и	т	е	м	н	а
ч	т	о	ж	е	т	ы	м
о	я	с	т	а	р	у	ш
к	а	п	р	и	у	м	о
л	к	л	а	у	о	к	н
а	и	л	и	б	у	р	и
з	а	в	ы	в	а	н	ь
е	м	т	ы	м	о	й	д
р	у	г	у	т	о	м	л
е	н	а	и	л	и	д	р
е	м	л	е	ш	ь	п	о
д	ж	у	ж	ж	а	н	ь
е	м	с	в	о	е	г	о
в	е	р	е	т	е	н	а

Ответ: Наша ветхая лачужка И печальна и темна. Что же ты, моя старушка, Приумолкла у окна? Или бури завываньем Ты, мой друг, утомлена, Или дремлешь под жужжаньем Своего веретена?

Задача 3

Пусть $r_{10}(a)$ – остаток от деления a на 10, тогда количество корректных номеров есть число решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} r_{10}(A)=0, \\ r_{10}(B)=0, \\ r_{10}(C)=0. \end{cases}$$

Для удобства расположим слагаемые (из вида A, B и C) в таблице:

x_1		x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
x_1		x_3	x_4	$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
x_1	x_2		x_4	$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Если первые 4 цифры 0, 0, 0, 0, то таблица примет вид:

	x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Но тогда первая строка есть остаток от деления суммы третьей и второй на 10. Вычитая из первой строки вторую и третью, а затем из второй строки третью, получим, что исходная система равносильна системе (см. приложение)

$$\begin{cases} r_{10}(x_{15})=r_{10}(4x_5-x_6-x_7+x_8-4x_9+x_{10}-x_{11}-x_{12}-x_{13}+x_{14}), \\ r_{10}(x_{16})=r_{10}(-7x_5-x_8-3x_9-x_{10}-x_{14}). \end{cases}$$

Количество решений есть количество способов поставить всеми возможными способами на места переменных $x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ числа $0,1,2,\ldots,9$. Таким образом, число корректных номеров равно 10^{10}.

Если же последние 4 цифры 0, 0, 0, 0, то таблица примет вид:

x_1		x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1		x_3	x_4	$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}
x_1	x_2		x_4	$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}		

В отличие от первого случая, переменные x_1, x_2, x_3 будут линейно выражаться через $x_4, x_6, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. И тогда получим, что число решений системы равно 10^9.

Ответ: в первом случае корректных номеров больше, чем во втором на $10^{10} - 10^9$.

Задача 4

Обозначим через $r_{32}(a)$ остаток от деления числа a на 32. Вычислим несколько первых членов последовательности $y_1, y_2, \ldots$:

$$y_2 = 4y_1 + 25,\ \ y_3 = 4(4y_1 + 25) + 25 = 16y_1 + 5\cdot 25,\ \ y_4 = 64y_1 + 21\cdot 25.$$

Далее $r_{32}(y_4) = r_{32}(21\cdot 25) = 13,$ а значит $r_{32}(y_5) = r_{32}(4y_4 + 25) = r_{32}(4\cdot 13 + 25) = 13.$ То есть, начиная с четвертого номера, все члены последовательности $r_{32}(y_n)$ равны 13. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ – числовые значения букв искомого слова. Чтобы найти x_4 надо решить уравнение $r_{32}(y_4 x_4) = 1.$ Заметим, что $r_{32}(y_4 x_4) = 1 \Leftrightarrow r_{32}(13x_4) = 1 \Leftrightarrow r_{32}(5\cdot 13x_4) = r_{32}(5\cdot 1) \Leftrightarrow r_{32}(x_4) = 5 \Rightarrow x_4 = 5.$ Следовательно, четвертая буква слова – Е. Аналогично находятся числовые значения букв $x_5, \ldots, x_{12}$. В итоге, искомое слово принимает вид ***ЕПЛАВАНИЕ. Ответ легко угадывается.

Ответ: МОРЕПЛАВАНИЕ.

Задача 5

Покажем, что у любых четырех карточек *A,B,C,D* можно изменить порядок их следования на противоположный (точками сверху будем отмечать те карточки, которые собираемся перекладывать):

$$\dot{A}, \dot{B}, C, \dot{D} \to D, \dot{A}, \dot{C}, \dot{B} \to D, \dot{B}, \dot{A}, \dot{C} \to D, C, B, A.$$

Теперь, перекладывая карточки сразу *четверками*, покажем как переложить 13 карточек в обратном порядке:

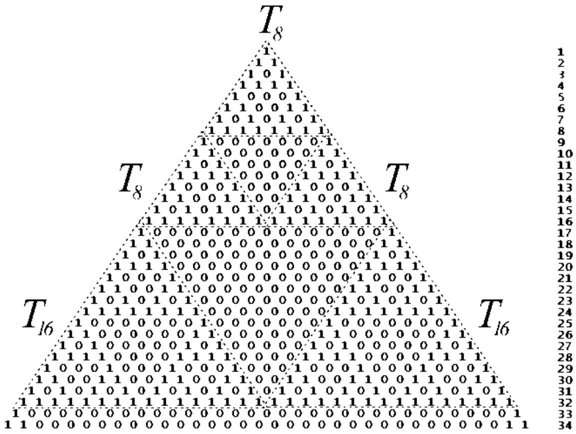
$$\dot{1}, \dot{2}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dot{12}, \dot{13} \to 13, 12, \dot{3}, \dot{4}, 5, 6, 7, 8, 9, \dot{10}, \dot{11},\ 2, 1 \to$$

$$\to 13, 12, 11, 10, \dot{5}, \dot{6}, 7, \dot{8}, \dot{9}, 4, 3,\ 2, 1 \to 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Ответ: Можно.

Задача 6

Будем заменять в треугольнике нечетные числа единицами, а четные нулями. При этом каждое число внутри по-прежнему остается равным сумме стоящих над ним чисел, если принять, что 0+0=1+1=0, 1+0=0+1=1. Рассмотрим структуру треугольника подробнее. Треугольник, сформированный первыми восемью строками, обозначим T_8. В строке 9 всего две единицы (по бокам), остальные – нули. С этой строки и вниз далее идет формирование двух треугольников T_8, которые "встречаются друг с другом" в строке 16. Начиная со строки 17 и ниже, образовываются два треугольника T_{16}, которые, в свою очередь, "встречаются" в строке 32. Со строки 33 и ниже формируются два треугольника T_{32} и т.д. Таким образом, строки, чей номер представляет собой степень двойки, состоят только из единиц. Поэтому в строке 256 четных чисел нет.



Обратимся теперь к строке 200. Понятно, что, после строки 128 (степень двойки), идет формирование "с нуля" двух одинаковых треугольников. Строки с номером 72 в этих новых треугольниках как раз и содержатся в строке 200 исходного (большого) треугольника, т.к. 200=128+72. Значит единиц в строке 200 вдвое больше, чем единиц в строке с номером 72. В свою очередь единиц в строке 72 вдвое больше, чем в строке 8 (рассмотреть треугольники, формирующиеся после строки 64). Количество же 1 в строке 8 можно подсчитать непосредственно – их 8 штук. Значит в строке 200 их 32, остальные 168 – нули.
Ответ: а) 0, б) 168.

XXV Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Для проверки корректности номера пластиковой карты, представляющего собой набор из 16 цифр $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16})$, вычисляются контрольные суммы *A, B* и *C*:

$A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$,

$B = x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 7x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{15}$, $C = x_1 + x_2 + x_4 + 7x_5 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + x_{14} + x_{16}$.

Если все три суммы *A*, *B* и *C* делятся нацело на 10, то номер признаётся корректным. Каких корректных номеров больше и насколько: у которых первые 4 цифры 0 0 0 0 или тех, у которых последние 4 цифры 0 0 0 0?

2. Докажите, что существует натуральное число, кратное 2015, десятичная запись которого имеет вид 12351235…1235 (т.е. образована последовательным повторением фрагмента 1235).

3. *Треугольником Паскаля* называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится: а) в строке с номером 1024? б) в строке с номером 1050?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
…

4. Рассмотрим множество всех точек плоскости, координаты которых имеют вид $(m+2n, 3m-n)$, где m, n – целые числа. Докажите, что на прямой, проходящей через любые две точки указанного множества, лежит сторона некоторого квадрата, все четыре вершины которого принадлежат этому множеству. Укажите минимальную площадь такого квадрата.

5. Число городов в Криптоландии равно 4^4. В качестве названий города имеют различные цифровые комбинации вида *(a,b,c,d)*, где *a,b,c* и *d* – целые числа из множества {0,1,2,3}. Два города, названия которых отличаются одной цифрой, называются *соседними*. Например, города (3201) и (3001) соседние, а (1111) и (3311) – нет. У каждого города есть флаг определенного цвета, причем флаги соседних городов всегда имеют несовпадающие цвета. Власти объявили конкурс на создание системы флагов для городов, имеющей наименьшее возможное число различных цветов. Найдите это наименьшее число. Ответ обоснуйте.

a \ *b*	1	2	3	11	12	13
1	-	+	-	-	-	+
2	-	+	+	-	-	-
3	+	-	+	-	+	-
4	+	-	-	-	+	-
5	-	-	-	+	-	+
6	-	-	-	+	-	+
7	-	+	+	-	-	-
8	-	+	+	-	+	-
9	+	-	-	-	+	-
10	+	-	-	+	-	+

6. Чтобы снять деньги с карточки, Алиса в банкомате вводит пин-код (ПК) x_1, x_2, x_3, x_4 – набор из 4-х целых чисел ($0 \le x_i \le 9, i = 1, 2, 3, 4$). Банкомат зашифровывает введенный ПК по следующему правилу: он случайным образом выбирает целое число x_5 такое, что $10 \le x_5 \le 15$, а затем формирует зашифрованный пин-код (ЗПК) y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 по формулам: $y_1 = f(r_{16}(x_1 + 3\cdot y_0))$, $y_2 = f(r_{16}(x_2 + 3\cdot y_1))$, $y_3 = f(r_{16}(x_3 + 3\cdot y_2))$, $y_4 = f(r_{16}(x_4 + 3\cdot y_3))$, $y_5 = f(r_{16}(x_5 + 3\cdot y_4))$, где $y_0 = 2$, $r_{16}(x)$ – остаток от деления числа *x* на 16, а f – некоторое правило, по которому одно целое число от 0 до 15 заменяется на другое (возможно, то же самое) целое число от 0 до 15, причем разные числа заменяются разными. После этого ЗПК отправляется на сервер, где он расшифровывается (т.е. по присланным числам y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 вычисляются x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5), и, если x_5 не удовлетворяет неравенству $10 \le x_5 \le 15$, то сервер выдает сообщение об ошибке. Известно, что для

ПК Алисы был сформирован следующий ЗПК: 13,13,1,11,7. Известно также, что хакеры пытались отсылать на сервер (напрямую, минуя банкомат) в качестве y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 комбинации чисел вида $0,0,0,a,b$. Результаты их попыток приведены в таблице (знак “+” – сервер не выдал сообщение об ошибке, знак “-” – выдал). Какой ПК у Алисы?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Пусть $r_{10}(a)$ – остаток от деления a на 10, тогда количество корректных номеров есть число решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} r_{10}(A)=0, \\ r_{10}(B)=0, \\ r_{10}(C)=0. \end{cases}$$

Для удобства расположим слагаемые (из вида A, B и C) в таблице:

x_1		x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
x_1		x_3	x_4	$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
x_1	x_2		x_4	$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Если первые 4 цифры 0, 0, 0, 0, то таблица примет вид:

	x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Но тогда первая строка есть остаток от деления суммы третьей и второй на 10. Вычитая из первой строки вторую и третью, а затем из второй строки третью, получим, что исходная система равносильна системе (см. приложение)

$$\begin{cases} r_{10}(x_{15}) = r_{10}(4x_5 - x_6 - x_7 + x_8 - 4x_9 + x_{10} - x_{11} - x_{12} - x_{13} + x_{14}), \\ r_{10}(x_{16}) = r_{10}(-7x_5 - x_8 - 3x_9 - x_{10} - x_{14}). \end{cases}$$

Количество решений есть количество способов поставить всеми возможными способами на места переменных $x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ числа 0,1,2,…,9. Таким образом, число корректных номеров равно 10^{10}.

Если же последние 4 цифры 0, 0, 0, 0, то таблица примет вид:

x_1		x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1		x_3	x_4	$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}
x_1	x_2		x_4	$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}		

В отличие от первого случая, переменные x_1, x_2, x_3 будут линейно выражаться через $x_4, x_6, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. И тогда получим, что число решений системы равно 10^9.

Ответ: в первом случае корректных номеров больше, чем во втором на $10^{10} - 10^9$.

Задача 2

Натуральное число делится на 2015 нацело в том и только том случае, когда оно делится на 5 и на 403. Рассмотрим теперь все числа, десятичная запись которых имеет вид 12351235…1235:

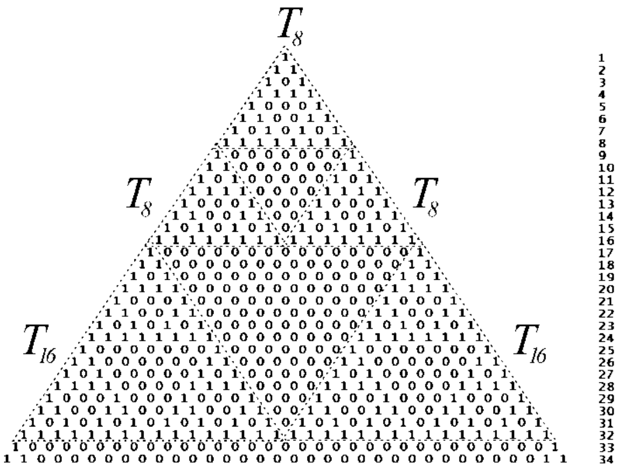
$$x_1 = 1235,\ x_2 = 12351235, \dots \qquad (1)$$

Среди них найдутся два числа, x_m и x_n $(m > n)$, которые имеют одинаковые остатки при делении на 403. Действительно, чисел вида (1) бесконечно много, а различных остатков от деления на 403 всего 403 штуки.

Тогда их разность $x_m - x_n$ делится на 403 (см. приложение). Теперь отбросим все нули на конце десятичной записи этой разности. В результате получим число вида (1). И это число, очевидно, по-прежнему делится на 403. Оно делится также и на 5, так как на 5 оканчивается, а значит, делится на 2015.

Задача 3

Будем заменять в треугольнике нечетные числа единицами, а четные нулями. При этом каждое число внутри по-прежнему остается равным сумме стоящих над ним чисел, если принять, что 0+0=1+1=0, 1+0=0+1=1. Рассмотрим структуру треугольника подробнее. Треугольник, сформированный первыми восемью строками, обозначим T_8. В строке 9 всего две единицы (по бокам), остальные – нули. С этой строки и вниз далее идет формирование двух треугольников T_8, которые "встречаются друг с другом" в строке 16. Начиная со строки 17 и ниже, образовываются два треугольника T_{16}, которые, в свою очередь, "встречаются" в строке 32. Со строки 33 и ниже формируются два треугольника T_{32} и т.д. Таким образом, строки, чей номер представляет собой степень двойки, состоят только из единиц. Поэтому в строке 1024 четных чисел нет.



Обратимся теперь к строке 1050. Уже понятно, что, после строки 1024, идет формирование "с нуля" двух одинаковых треугольников. Строки с номером 26 в этих новых треугольниках как раз и содержатся в строке 1050 исходного (большого) треугольника, т.к. 1050=1024+16. Значит единиц в строке 1050 вдвое больше, чем единиц в строке с номером 26. Количество же 1 в строке 26 можно подсчитать непосредственно, или, рассуждая аналогично, заметить, что их вдвое больше, чем в строке 10. То есть всего в строке 26 восемь 1. Значит в строке 1050 их 16. Остальные 1034 – нули.

Ответ: а) 0, б) 1034.

Задача 4

Для решения поставленной задачи достаточно доказать, что на любой прямой, проходящей через $(0,0)$ и точку вида $(m+2n, 3m-n)$, $m,n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ - множество целых чисел), лежит сторона некоторого квадрата, все вершины которого принадлежат указанному множеству.

Известно, что перпендикулярными к вектору (a,b) являются все вектора вида $k(-b,a), k \in R$ и только они. Применительно к нашей задаче, требуется проверить, что для каждого вектора $(m_1+2n_1, 3m_1-n_1)$, $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ существует перпендикуляр вида $(m_2+2n_2, 3m_2-n_2)$, $m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$. Другими словами надо решить относительно $k, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ уравнение

$$k(n_1-3m_1, m_1+2n_1) = (m_2+2n_2, 3m_2-n_2).$$

Перепишем полученное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} k(n_1-3m_1) = m_2+2n_2, \\ k(m_1+2n_1) = 3m_2-n_2, \end{cases}$$

которую несложно преобразовать в эквивалентную систему

$$\begin{cases} m_2 + 2n_2 = k(n_1 - 3m_1), \\ -7n_2 = k((m_1 + 2n_1) - 3(n_1 - 3m_1)), \end{cases}$$

разрешимость которой очевидна – последовательно выбираем подходящие целые числа k, n_2 и m_2.

Таким образом, для всякого вектора $(m_1 + 2n_1, 3m_1 - n_1)$, $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ существует перпендикулярный ему вектор $k(n_1 - 3m_1, m_1 + 2n_1)$ вида $(m_2 + 2n_2, 3m_2 - n_2)$. Нетрудно понять, что вектора $k(m_1 + 2n_1, 3m_1 - n_1)$ и $k(n_1 - 3m_1, m_1 + 2n_1)$ являются сторонами искомого квадрата.

Будем искать квадрат с минимальной площадью. Без ограничения общности можно считать, что вершина A квадрата совпадает с началом координат (0,0). Пусть вершины B и C имеют координаты $B\left(m_1 + 2n_1, 3m_1 - n_1\right), C\left(m_2 + 2n_2, 3m_2 - n_2\right)$. Координаты четвертой вершины квадрата D совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{AD}$, которые находятся из очевидного соотношения

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \left(m_1 + m_2 + 2(n_1 + n_2), 3(m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)\right).$$

То есть точка D, разумеется, принадлежит нашему множеству. Данный четырехугольник является квадратом в том и только том случае, когда

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \text{ и } \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(m_1 + 2n_1\right)\left(m_2 + 2n_2\right) + \left(3m_1 - n_1\right)\left(3m_2 - n_2\right) = 0, \\ \left(m_1 + 2n_1\right)^2 + \left(3m_1 - n_1\right)^2 = \left(m_2 + 2n_2\right)^2 + \left(3m_2 - n_2\right)^2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим

$$m_2 = \frac{m_1}{7} - \frac{5n_1}{7}, \quad n_2 = \frac{10m_1}{7} - \frac{n_1}{7}. \qquad (*)$$

Имеется, конечно же, еще одно решение, поскольку точку C можно отразить симметрично относительно прямой AB и получить тот же квадрат, повернутый на 90^0. Это решение рассматривается аналогично.

Мы выразили числа m_2 и n_2 через m_1 и n_1. Однако, целые числа m_1 и n_1 нельзя выбирать совершенно произвольно, так как вычисленные затем по формулам (*) числа m_2 и n_2 должны также быть целыми. Можно в этой связи показать, что число n_1 все же можно выбирать произвольно, но тогда число m_1 должно иметь вид $m_1 = 5n_1 + 7k$, где k – уже произвольное целое число. Подставив полученное выражение для m_1 в формулу для площади $S = \left(m_1 + 2n_1\right)^2 + \left(3m_1 - n_1\right)^2$, получим

$$S = 49\left(5n_1^2 + 14n_1k + 10k^2\right).$$

Выражение в скобках принимает только целые положительные значения. Значит, меньше 49 площадь быть не может. Чтобы убедиться, что значение 49 достижимо, достаточно взять $m_1 = -2, n_1 = 1, m_2 = -1, n_2 = 3.$

Ответ: 49.

Задача 5

Заметим, что среди городов (0000), (1000), (2000) и (3000) любые два являются соседними. Значит, цветов надо минимум четыре. Покажем, что четырех цветов достаточно. Имеющиеся у нас цвета будем называть цвет-0, цвет-1, цвет-2, цвет-3. Флаг города будет окрашен в цвет, номер которого равен остатку от деления на 4 суммы цифр в названии этого города (например, для города (3201) этот остаток равен 2, значит, его флаг будет окрашен в цвет-2). У соседних городов эти остатки всегда различны, так как их названия отличаются *одной* цифрой. Следовательно, 4-х цветов достаточно.

Ответ: 4 цвета.

Задача 6

Для формирования величины x_5, которая будет проверяться на предмет того, принадлежит ли она множеству $\Omega_1=\{10,11,12,13,14,15\}$, будут задействованы только последние два числа: a,b. Тогда процедура проверки будет выглядеть следующим образом:

$$x_5=r_{16}(f^{-1}(b)-3a)\overset{?}{\in}\Omega_1.$$

Нетрудно догадаться по виду данной в условии таблицы, что структура каждого столбца с номером b таблицы с точки зрения возникающих ошибок x_5 будет следующей:

+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

$$a_j=r_{16}(a_1+j),\ j=\overline{1,16}.$$

<u>Вариант рассуждений а).</u>

Выделяем случаи, когда $x_5\in\Omega_1$ (помечены в таблице темным, далее по тексту условно обозначим Ω_1+c - множество элементов Ω_1, к каждому из которых прибавлено число c и от получившихся значений взят остаток от деления на 16):

- при a_1 имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)\in\Omega_1=\{10,11,12,13,14,15\};$$

- при $a_2=a_1+1$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)\in\Omega_1+3=\Omega_2=\{13,14,15,0,1,2\};$$

- при $a_7=a_1+6$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)\in\Omega_1+2=\Omega_7=\{12,13,14,15,0,1\};$$

- при $a_8=a_1+7$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)\in\Omega_1+5=\Omega_8=\{15,0,1,2,3,4\};$$

- при $a_{12}=a_1+11$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)\in\Omega_1+1=\Omega_{12}=\{11,12,13,14,15,0\};$$

- при $a_{13}=a_1+12$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)\in\Omega_1+4=\Omega_{13}=\{14,15,0,1,2,3\}.$$

Нетрудно заметить, что $\Omega_1\cap\Omega_8=\{15\}$, то есть

$$r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)=15.$$

<u>Вариант рассуждений б).</u>

Ответим на вопрос, при каких значениях $x_5=r_{16}(f^{-1}(b)-3\cdot a)$ возможна ситуация, что при проверке $x_5\in\Omega_1$ при a_1 будет “+”, при $a_2=a_1+1$ будет “+”, а при $a_3=a_2+1,\ a_4=a_3+1,\ a_5=a_4+1,\ a_6=a_5+1$ будет “-”. Исходя из приведенной ниже таблицы, нетрудно заметить, что только при $x_5=r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)=15$.

$-3\cdot a=$	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
$x_5=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	a_6			a_5			a_4			a_3			a_2			a_1

<u>Общий вывод из рассуждений а) или б):</u>

Если в таблице ошибок для x_5 при заданном b есть структура вида

+	+	-	-	-	-
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

то $r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)=15$, то есть $f^{-1}(b)=r_{16}(3a_1-1)$. Это является удобным критерием для определения обратных значений функции f.

Рассмотрим столбец из данной в условии таблицы с $b=11$. Из-за закономерностей в образовании “+” не трудно догадаться, что подходящей под критерий структурой будет

+	+	-	-	-	-
15	0	1	2	3	4

Поэтому $a_1=15$ и $f^{-1}(11)=r_{16}(3\cdot 15-1)=12$, что позволяет найти x_4:

$$x_4=r_{16}(f^{-1}(11)-3\cdot 1)=r_{16}(12-3)=9.$$

Рассмотрим столбец из данной в условии таблицы с $b=1$. Не трудно заметить, что подходящей под критерий структурой будет

+	+	-	-	-	-
3	4	5	6	7	8

Поэтому $a_1=3$ и $f^{-1}(1)=r_{16}(3\cdot 3-1)=8$, что позволяет найти x_3:

$$x_3=r_{16}(f^{-1}(1)-3\cdot 13)=r_{16}(8-7)=1.$$

Рассмотрим столбец из данной в условии таблицы с $b=13$. Из-за закономерностей в образовании “-” не трудно догадаться, что подходящей структурой будет

+	+	-	-	-	-
10	11	12	13	14	15

Поэтому $a_1=10$ и $f^{-1}(13)=r_{16}(3\cdot 10-1)=13$, что позволяет найти x_1, x_2:

$$x_1=r_{16}(f^{-1}(13)-3\cdot 2)=r_{16}(13-6)=7;$$

$$x_2=r_{16}(f^{-1}(13)-3\cdot 13)=r_{16}(13-7)=6.$$

Ответ: ПК Алисы 7,6,1,9.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП 2015-2016

9 класс

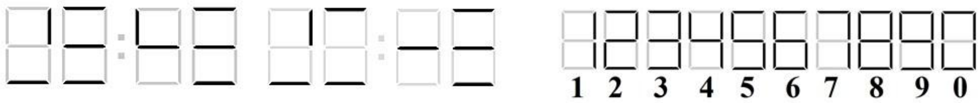
Задача 1

Женя решила поделиться забавным палиндромом с Ксюшей. Но, чтобы никто о нем больше не узнал, Женя удалила пробелы между словами, перемешала буквы и получила вот что: буапнкалауалианкабп. Помогите Ксюше прочитать палиндром (палиндром – текст, читающийся одинаково в обоих направлениях. Например: «ароза упала на лапу азора»). В ответе укажите найденный палиндром без пробелов сторочными буквами.

Ответ: кабанупалилапунабак

Задача 2

Имеются сломанные электронные часы (они идут точно, но некоторые элементы табло перегорели). Показания часов в некоторый момент времени приведены на рисунке (а), а спустя ровно 23 минуты – на рисунке (б). Определите время, которое на рисунке (а) показывали бы исправные часы. Отображение цифр на исправном табло показано на рисунке (в). В ответе укажите через двоеточие часы и минуты. Например, если часы показывали 12 часов 4 минуты, то в ответе необходимо указать 12:04.



(а) (б) (в)

Ответ: 23:59

Задача 3

Дана последовательность из 11 чисел $x_1, \ldots, x_{11}$. В ней каждое число x_i равно либо 0, либо 1. Из этой последовательности получили последовательность из 10 чисел $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ по формулам
$y_1 = x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2, y_2 = x_2 + x_3 - x_2 \cdot x_3, \ldots, y_{10} = x_{10} + x_{11} - x_{10} \cdot x_{11}$.
Определите, какие из четырёх приведённых ниже последовательностей $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ не могли быть получены указанным способом.
(I): 1100110011; (II): 1110000010; (III):0011001001; (IV):0111000111.

Ответ: 1110000010; 0011001001

Задача 4

Линия связи состоит из 4-х каналов, пронумерованных числами 1,2,3,4. Для передачи по линии сигнала на каждый канал подается свой импульс, величина которого может быть 8, 10 или 12 единиц. В каждом канале есть усилитель, который увеличивает поданный импульс в 3^{i-1} раз, где i - номер канала. На выходе линии формируется сигнал, который равен остатку от деления на 81 суммы полученных по каналам импульсов. Какие импульсы необходимо подать на каналы, чтобы получить сигнал, величиной 7 единиц? В ответе укажите последовательно без запятой и пробелов величины импульсов. Например, если величины импульсов 10, 12,8,12 то в ответе необходимо привести последовательность: 1012812

Ответ: 1081210

Задача 5

У числа 2015^{1999} нашли сумму цифр. У результата опять нашли сумму цифр. И так поступали до тех пор, пока не получили однозначное число. В ответе укажите данное число.

Ответ: 8

10 класс

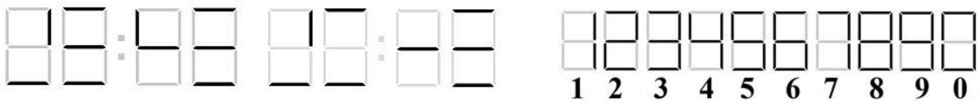
Задача 1

Женя решила поделиться забавным палиндромом с Ксюшей. Но, чтобы никто о нем больше не узнал, Женя удалила пробелы между словами, перемешала буквы и получила вот что: тдиенгоортониеровгд. Помогите Ксюше прочитать палиндром (палиндром – текст, читающийся одинаково в обоих направлениях. Например: «а роза упала на лапу азора»). В ответе укажите найденный палиндром без пробелов строчными буквами.

Ответ: инетдорогвгородтени

Задача 2

Имеются сломанные электронные часы (они идут точно, но некоторые элементы табло перегорели). Показания часов в некоторый момент времени приведены на рисунке (а), а спустя ровно 23 минуты – на рисунке (б). Определите время, которое на рисунке (а) показывали бы исправные часы. В ответе укажите через двоеточие часы, затем минуты. Например, если часы показывали 12 часов 4 минуты, то в ответе необходимо указать 12:04.



(а) (б) (в)

Ответ: 23:59

Задача 3

Из последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_i \in \{0,1\}$ получена последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ по правилу: $y_i = max\{x_i, x_{i+1}\},\ i = 1, \ldots, n-1.$
Сколько последовательностей $y_1, y_2, \ldots, y_6$ может быть получено (при выборе всевозможных $x_1, \ldots, x_7, x_i \in \{0,1\}$)?

Ответ: 37

Задача 4

У числа 2015^{1999} нашли сумму цифр. У результата опять нашли сумму цифр. И так поступали до тех пор, пока не получили однозначное число. В ответе укажите данное число.

Ответ: 8

Задача 5

Линия связи состоит из 4-х каналов, пронумерованных числами 1,2,3,4. Для передачи по линии сигнала на каждый канал подается свой импульс, величина которого может быть 8, 10 или 12 единиц. В каждом канале есть усилитель, который увеличивает поданный импульс в 3^{i-1} раз, где i - номер канала. На выходе линии формируется сигнал, который равен остатку от деления на 81 суммы полученных по каналам импульсов. Какие импульсы необходимо подать на каналы, чтобы получить сигнал, величиной 7 единиц? В ответе укажите последовательно без запятой и пробелов величины импульсов. Например, если величины импульсов 10, 9, 8, 7 то в ответе необходимо привести последовательность: 10987.

Ответ: 1081210

11 класс

Задача 1

Женя решила поделиться забавным палиндромом с Ксюшей (палиндром – текст, читающийся одинаково в обоих направлениях. Например: «А роза упала на лапу Азора»). Но чтобы никто о нем больше не узнал, Женя зашифровала его следующим образом: каждую букву палиндрома она заменила числом согласно таблице и в результате получила последовательность чисел $x_1, x_2, ..., x_{25}$. Затем она взяла последовательность целых чисел $y_1, y_2, ..., y_{25}$, полученных по правилу $y_i = i \cdot d$, где d - некоторое целое число, и вычислила новую последовательность $r_1, r_2, ..., r_{25}$, где r_i равно остатку от деления на 33 суммы $x_i + y_i$. В результате у неё получилось вот что: 20 11 20 3 6 3 27 10 24 5 2 28 11 5 22 2 31 27 21 7 20 27 21 22 8. Помогите Ксюше прочитать палиндром. В ответе укажите найденный палиндром. Ответ введите строчными буквами без пробелов между словами.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Ответ: надомечвкулакалуквчемодан

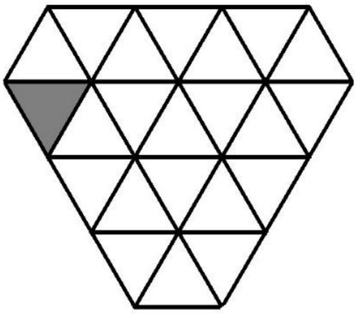
Задача 2

У числа 2015^{1999} нашли сумму цифр. У результата опять нашли сумму цифр. И так поступали до тех пор, пока не получили однозначное число. В ответе укажите данное число.

Ответ: 8

Задача 3

В каждой треугольной ячейке (см. рис.) сидит по кузнечику. Одновременно все кузнечики перепрыгивают в какую-либо соседнюю по стороне ячейку (например, серая ячейка граничит по стороне с двумя ячейками). При этом в одной ячейке могут оказаться несколько кузнечиков. Каково минимальное количество ячеек, в которых не окажется ни одного кузнечика?



Ответ: 2

Задача 4

Линия связи состоит из 4-х каналов, пронумерованных числами 1,2,3,4. Для передачи по линии сигнала на каждый канал подается свой импульс, величина которого может быть 7, 9, 11, 13 или

15 единиц. В каждом канале есть усилитель, который увеличивает поданный импульс в 5^{i-1} раз, где i - номер канала. На выходе линии формируется сигнал, который равен остатку от деления на 625 суммы полученных по каналам импульсов. Какие импульсы необходимо подать на каналы, чтобы получить сигнал, величиной 34 единиц? В ответе укажите последовательно без запятой и пробелов величины импульсов. Например, если величины импульсов 10, 9, 8, 7 то в ответе необходимо привести последовательность: 10987.

Ответ: 915137

Задача 5

Из последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_i \in \{0,1\}$ получена последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ по правилу: $y_i = x_i + x_{i+1} - x_i \cdot x_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1.$
Сколько последовательностей $y_1, y_2, \ldots, y_6$ может быть получено (при выборе всевозможных $x_1, \ldots, x_7, x_i \in \{0,1\}$)?

Ответ:37